연차 보고서(1차)

사업명	KAIST Grand Challenge 30 Project		
과제명	(국문) 대수적 초곡면의 함수체		
	(영문) Function field of algebraic hypersurfaces		
연구책임자	이용남	소 속	수리과학과
총수행기간 (1단계)	2018 . 1 . 1 . ~ 2022 . 12. 31 . (5 년)		
당해연도 협약기간	2018 . 1 . 1 . ~ 2018 . 12 . 31. (1년)		
당해년도 사업비(원)	20,000,000원		

자체연구협약서(KAIST Grand Challenge 30 Project)제5조에 의거하여
연차보고서 2부를 제출합니다.

2018 년 1 월 14 일

연구책임자: 이용남 (인)

한국과학기술원 총장 귀하

◇ 연차보고서 작성 요령

Ⅰ. 해당 연도 추진 현황

Ⅰ-1 기술개발 추진 내용

본 연구에서는 사영대수 다양체의 대수적 초곡면과 초곡면의 덮개로 생기는 대수다양체의 함수체의 대수적 성질 (rationality, unirationality, existence of proper non-rational subfields)과 관련된 난제들에 대해서 연구하고 있다.

상수들이 체 K 상에 있으면서 n+1개의 변수를 가지는 차수가 d인 동형방정식의 해 공간으로부터 생기는 대수다양체 X는 n차원 사영공간의 대수적 초곡면을 이룬다. 예로 $(a_0,\cdots,a_n)$이 동형방정식 $x_0^d+x_1^d+\cdots+x_n^d=0$의 해라고 하면 모든 0이 아닌 λ에 대해서 $(\lambda a_0,\cdots,\lambda a_n)$이 또한 해가 된다. 이 연구에서는 차수가 d이면서 irreducible한 동형방정식 $F(x_0,x_1,\dots,x_n)$의 해 공간으로 생기는 대수다양체 X의 대수적, 기하학적 성질을 연구하려고 한다.

선형변환에 의해

$$f(x_1,\dots,x_n):=F(1,x_1,\dots,x_n)\neq 0$$

을 가정할 수 있는데 $K[x_1,\dots,x_n]/(f(x_1,\dots,x_n))$의 quotient field를 대수적 초곡면 X의 함수체 $K(X)$라고 한다.

$K(X)$가 유리 체(즉, transcendental basis $u_1,\dots,u_{n-1}$있어 $K(X)=K(u_1,\dots,u_{n-1})$이 되어서 함수체가 purely transcendental이 되는 경우)일 때 대수다양체 X를 유리 다양체(rational variety)라고 한다. $d=1,2$일 때는 유리다양체이다.

$K(X)$가 유리 체가 되면 n개의 다항식 $g_1,\dots,g_n$이 존재하여 $x_i=g_i(u_1,\dots,u_{n-1})$로 표현할 수 있어 rational parametrization을 갖는다. 역으로 rational parametrization의 존재는 $K(X)$에서 $K(u_1,\dots,u_{n-1})$으로 가는 field homomorphism φ를 준다. Field homomorphism φ가 injective이면 이는 $\mathbb{P}^{n-1}\to X$로 가는 dominant rational map의 존재와 같은데 이러한 경우 X를 unirational variety라고 한다. 하지만 일반적으로 이 함수 φ가 surjective일 필요가 없는데 이 φ가 surjective인 경우 rational variety라고 한다. 즉, $K(X)\cong K(u_1,\dots,u_{n-1})$이다. 물론 unirational variety이면 rational variety가 된다. 대수적 초곡면의 rationality와 unirationality는 간단하게 보이는 문제이지만 해결하기 매우 어려운 문제이다.

차수 $d\geq n+1$이 되면서 smooth한 대수적 초곡면 X는 기하학적 성질 (canonical divisor가

음이 아님, 또는 기하학적 곡률이 음이 됨)에 의해 unirational variety가 될 수 없다.
유명한 갈로아 이론은 f를 매우 일반적으로 선택하면 $K=\mathbb{Q}$인 유리수 체일 때 $n=1$이고 $d\geq 5$이면 f의 splitting field와 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ (D는 f의 discriminant) 사이에는 정규 부분체가 없어 d차 방정식은 해의 공식을 갖지 않는다는 것이다. 물론 특별한 f를 택하면 갈로아 군이 solvable하여 근의 공식을 구할 수 있다.

이러한 개념을 일반화 하여 변수 n을 늘리면 다음과 같은 난제가 생긴다. K를 algebraically closed field라고 하자. 특별히 K를 복소수 체라고 가정하자.

난제: 차수 $d\geq n+2$인 동형방정식 F를 매우 일반적으로 선택하면 $K(X)$의 부분체는 자기 자신을 제외하고는 모두 rationally connected 대수다양체의 함수체이다.

$n=2$일 때는 Riemann-Hurwitz 정리나 Hodge이론에 의해 사실이다. 그리고 Maehara의 결과와 최근에 발전한 고차원 대수다양체의 매우 중요한 결과 (Hacon-McKernan, Takayama, Tsuji)로부터 $K(X)$의 부분체가 유한개만 있다는 것을 안다.

본 연구자는 Hodge이론, 대수곡선의 변형이론, 2차원 대수다양체의 분류 이론 등을 독창적으로 적용하여 $n=3$일 때 난제를 해결하였다. 그리고 대수적 초곡면 뿐만 아니라 2차원 대수다양체의 난제와 관련되어 선행연구를 하였다. 위의 난제들 자체는 간단하게 보이는 순수 대수학 문제이지만 이를 해결하기 위해서는 상당히 많은 독창적이고 어려운 기하학적 이론들이 적용되어질 것으로 예상하고 있다. 위에서 언급한 난제 외에도 대수적 초곡면에 관련된 대수학적, 기하학적 난제들이 존재한다. 예를 들면 대수적 초곡면의 변형이론, 그 안에 내재된 대수곡선의 제약에 관련된 문제들, $K(X)$와 쌍곡성질과의 관계의 존재성 등에 대해서 난제들이 존재한다.

Ⅰ-2 해당 연도 추진 실적

지난 1년의 연구에서는 위의 난제에 대해서 복소수 체 상에서 대수적 초곡면의 차원이 2인 경우는 사전연구에서 답을 얻었는데
i) 이를 대수적 초곡면의 차원이 3인 경우로 확장하는 연구,
ii) 3차원 사영공간의 대수적 초곡면 연구를 Picard number가 1인 3차원 파노다양체의 대수적 초곡면으로 확장하는 연구,
iii) 대수적 초곡면의 이중덮개의 경우로 확장하는 연구를 진행하였다.

위의 세 연구 모두 대수기하학의 여러 심오한 이론, Hodge 이론, 대수곡선 및 대수곡면의 모듈라이 공간 이론, 3차원 이상의 쌍유리 기하학 이론 등의 현재까지 발전된 이론들을 이해하고 추가로 발전시켜야 한다. 1차년도에서는 이들 이론을 연구하는데 시간을 소요하

였고 위의 연구 주제 중 ii)와 iii)에 집중하였다.
Picard number가 1인 3차원 파노다양체의 index는 1부터 4인데 4일 때가 3차원 사영공간, 3일 때가 smooth quadric 3-fold등이다. Index가 4일 때는 사전연구에서 해결하였고 유사한 방법으로 3일 때와 특별한 경우의 2인 경우가 해결된다.

사전연구에서 Lefschetz 이론으로부터 다음의 결과, Irreducibility of the monodromy action on the anti-invariant part of the vanishing cohomology of a very general element in an ample hypersurface of a complex smooth projective variety,를 보였는데 이를 이중 덮개로 확장하였다. 즉 Irreducibility of the monodromy action on the anti-invariant part of the vanishing cohomology on the double cover of a very general element in an ample hypersurface of a complex smooth projective variety임을 보였다. 이에 대한 응용으로 3차원 사영공간의 공간에서 quadric surafce에서 branch 되면서 차수가 7이상인 대수적 초곡면의 이중덮개로 오는 대수곡면의 함수체를 연구하였다.

II. 기술개발결과

10월로 종료되는 연구재단의 기본연구비와 공동 지원 연구로 Preprint를 하나 완성하여 arXiv에 올리고 저널에 투고하였다.
Vanishing cohomology on a double cover of a very general hypersurface (공동연구: Gian Pietro Pirola), arXiv:1807.02646.

III. 결론 및 차년도 계획

2차년도 연구에서는 1차년도의 진행된 연구주제 i) ii) iii)를 더욱 발전시키고 대수적 초고면의 다른 성질에 대한 연구도 병행하려고 한다. 구체적으로는
i) 대수적 초곡면의 차원이 3인 경우로 확장하는 데 필요한 Hodge 이론과 3차원 일반형 대수다양체에 대한 이론들과 모듈라이 이론의 연구
ii) Picard number가 1인 3차원 파노다양체의 대수적 초곡면으로 확장하는 연구와 양의 표수를 갖는 체 상의 대수적 초고면의 차원이 1 또는 2인 경우에 대한 연구
iii) 이중덮개의 연구를 cyclic cover로 확장하는 연구를 진행하려고 한다.

그리고 대수적 초곡면의 변형이론, 그 안에 내재된 대수곡선의 제약에 관련된 문제들, 대수적 초곡면의 함수체와 쌍곡성질과의 관계의 존재성 등에 대해서 살펴보려고 한다.

IV. 기타