대수적 초곡면의 함수 체
(Function field of algebraic hypersurfaces)

이용남 (수리과학과)

2017년 9월 28일

연구목표

- 사영 대수다양체의 대수적 초곡면의 함수 체의 대수적 성질 (rationality, unirationality, existence of proper non-rational subfields)과 관련된 난제들에 대해서 연구
- 이 연구문제들은 간단하게 보이지만 오랜 역사를 가진 난제들이며 대수기하학의 근본적인 문제

대수적 초곡면의 함수 체

상수들이 체 K상에 있으면서 $n+1$개의 변수를 가지는 차수가 d인 동형방정식 $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$의 해 공간으로부터 생기는 대수다양체 X는 n차원 사영공간 $\mathbb{P}^n = K^{n+1} - \{(0, \ldots, 0)\}/\sim$, $(a_0, \ldots, a_n) \sim (\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n), \lambda \in K^*$의 대수적 초곡면을 이룬다.

예로 $(a_0, \ldots, a_n)$이 동형방정식

$$x_0^d + x_1^d + \cdots + x_n^d = 0$$

의 해라고 하면 모든 0이 아닌 λ에 대해서 $(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n)$이 또한 해가 된다.

이 연구에서는 차수가 d이면서 irreducible한 동형방정식 $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$의 해 공간으로 생기는 대수다양체 X의 대수적, 기하학적 성질을 연구하려고 한다.

선형변환에 의해

$$f(x_1, \ldots, x_n) := F(1, x_1, \ldots, x_n) \neq 0$$

을 가정할 수 있는데 $K[x_1, \ldots, x_n]/(f(x_1, \ldots, x_n))$의 quotient field 를 대수적 초곡면 X의 <u>함수 체</u> $K(X)$라고 한다.

유리 다양체

$K(X)$가 유리 체(즉, transcendental basis $u_1, \ldots, u_{n-1}$이 있어 $K(X) = K(u_1, \ldots, u_{n-1})$이 되어서 함수 체가 purely transcendental 이 되는 경우)일 때 대수다양체 X를 유리 다양체(rational variety) 라고 한다. $d = 1, 2$일 때는 유리 다양체이다.

$K(X)$가 유리 체가 되면 n개의 다항식 $g_1, \ldots, g_n$이 존재하여

$$x_i = g_i(u_1, \ldots, u_{n-1}), \;\; i = 1, \ldots, n$$

로 표현할 수 있어 rational parametrization을 갖는다. 역으로 rational parametrization의 존재는 $K(X)$에서 $K(u_1, \ldots, u_{n-1})$으로 가는 injective field homomorphism φ를 준다.

하지만 일반적으로 이 함수 φ가 surjective일 필요가 없는데 이 φ가 surjective인 경우 unirational variety라고 한다. 물론 unirational variety이면 rational variety가 된다.

대수적 초곡면의 rationality와 unirationality는 간단하게 보이는 문제이고 세계적으로 유명한 수학자들이 도전하고 있으나 해결하기 매우 어려운 문제이다.

이 문제들은 순수한 대수적 문제이지만 매우 깊이 있는 여러 수학적 이론을 적용하여야 해결할 수 있는 문제들이다.

Rationality and unirationality

- 난제 A: 언제 대수적 초곡면 X가 unirational variety가 되겠는가?
- 난제 B: 언제 대수적 초곡면X 가 rational variety가 되겠는가? 특히 $d = 3$일 때?

Lüroth는 1875년 대수적 초곡면 X의 차원이 1이면서 unirational variety이면 rational variety가 됨을 보이고 다음과 같은 문제를 제시하였다.

Lüroth problem: 대수적 초곡면 X가 unirational variety이면 rational variety가 되는가?

Castelnuovo는 1893년 대수적 초곡면 X의 차원이 2이면서 K가 복소수 체이면 사실임을 증명하였다. 하지만 K의 characterstic이 소수인 체를 택하면 사실이 아니다.

그 후 고차원인 경우에 counter-example을 찾거나 증명하려는 여러 시도가 있었으나 성공하지 못하였다. 1970년대 초에 들어와서 3개의 중요한 진전이 있었다 (K가 복소수 체인 경우).

- Clemens-Griffiths: 3차원 cubic hypersurface가 unirational variety 이지만 rational variety는 아님.
- Iskovskikh -Manin: 3차원 일부 quartic hypersurface가 unirational variety이지만 rational variety가 아님.
- Artin-Mumford: 3차원의 대수적 초곡면 중 unirational variety 이지만 rational variety가 되지 않는 예.

이러한 진전을 제외하고는 1990년대 중반의 Kollár에 의한 rational variety가 안 되는 criterion을 찾은 것, 그리고 최근의 Voisin의 연구들이 이 방면의 연구의 큰 진전이다.

차수 $d \geq n+1$이 되면서 smooth한 대수적 초곡면 X는 기하학적 성질 (canonical divisor가 음이 아님, 또는 기하학적 곡률이 양이 아님)에 의해 unirational variety가 될 수 없다.

유명한 갈로아 이론은 f를 매우 일반적으로 선택하면 $K = \mathbb{Q}$인 유리수 체일 때 $n = 1$이고 $d \geq 5$이면 $\mathbb{Q}(X)$의 Galois closure $\hat{\mathbb{Q}}(X)$의 갈로아 군이 A_d군이 되어 $\hat{\mathbb{Q}}(X)$와 유리수 체 $\mathbb{Q}$사이에 정규 부분체가 없어 d차 방정식은 해의 공식을 갖지 않는다는 것이다. 물론 특별한 f를 택하면 갈로아 군이 solvable하여 근의 공식을 구할 수 있다.

이러한 개념을 일반화 하여 변수 n을 늘리면 다음과 같은 난제가 생긴다. K를 algebraically closed field라고 하자. 특별히 K를 복소수 체라고 가정하자.

Proper non-rational subfield

난제 C: 차수 $d \geq n+2$인 동형방정식 F를 매우 일반적으로 선택하면 $K(X)$의 부분체는 자기 자신을 제외하고는 모두 유리 체이다.

$n=2$일 때는 Riemann-Hurwitz 정리나 Hodge이론에 의해 사실이다. 그리고 Maehara의 결과와 최근에 발전한 고차원 대수다양체의 매우 중요한 결과 (Hacon-McKernan, Takayama, Tsuji)로부터 $K(X)$의 부분체가 유한 개만 있다는 것을 안다.

선행연구: Hodge이론, 대수곡선의 변형이론, 2차원 대수다양체의 분류 이론 등을 독창적으로 적용하여 $n = 3$일 때 난제 C를 해결하였다. 그리고 대수적 초곡면 뿐만 아니라 2차원 대수다양체의 난제 C와 관련되어 선행연구를 하였다.

위의 난제들 자체는 간단하게 보이는 순수한 대수학 문제이지만 이를 해결하기 위해서는 상당히 많은 독창적이고 어려운 기하학적 이론들이 적용되어질 것으로 예상한다.

난제 A, B, C외에도 대수적 초곡면에 관련된 대수학적, 기하학적 난제들이 존재한다. 예를 들면 대수적 초곡면의 변형이론, 그 안에 내재된 대수곡선의 제약에 관련된 문제들, $K(X)$와 쌍곡성질과의 관계의 존재성 등에 대해서 난제들이 존재한다.

본 연구는 위의 난제 A, B, C를 중심으로 대수적 초곡면의 대수적 성질을 연구하려고 한다. 본 연구는 수학분야의 글로벌 난제이고 대수기하학 분야의 근본적 문제이며 당연히 10년 이내 상업화가 가능한 주제가 아니다.

연구자는 현재 이 연구를 주력으로 하고 있지는 않지만 많은 관심을 가지고 있으며 삼성미래재단 연구비(유리-고렌슈타인 변형 연구 및 응용) 종료 후에는 더욱 주력하려고 한다.