연차 보고서(3차)

사업명	KAIST Grand Challenge 30 Project		
과제명	(국문) 일반화된 카스텔누오보 가설 및 그리브너 기저의 계산복잡도 연구		
	(영문) The generalized Castelnuovo conjecture and the complexity of Groebner basis.		
연구책임자	곽 시 종	소 속	한국과학기술원
총수행기간 (1단계)	2016. 6. 1. ~ 2020. 12. 31. (4년 7개월)		
당해연도 협약기간	2019. 01. 01. ~ 2019. 12. 31. (1년)		
당해년도 사업비(원)	15,000,000원		

자체연구협약서(KAIST Grand Challenge 30 Project)제5조에 의거하여
연차보고서 2부를 제출합니다.

2019년 1 월 13일

연구책임자: 곽 시 종 (인)

한국과학기술원 총장 귀하

◇ 연차보고서 작성 요령

Ⅰ. 해당 연도 추진 현황

Ⅰ-1 연구개발 추진 내용

고전적 대수기하학의 가장 오래된 문제들 중의 하나인 "Castelnuovo-Mumford-Eisenbud-Goto" 가설은 그뢰브너 기저의 복잡도와 대수다양체들의 기하학적 성질과 대수적 구조를 이해하는 연구와 직접적으로 연관되어 있다. 카스텔누오보 교수에 의해 1900년대 초에 처음 제기된 고전 대수기하학의 매우 어려운 문제로 1984년에 다시 reformulated된 "Castelnuovo-Mumford-Eisenbud-Goto" 가설을 이해하고 보다 큰 관점에서 일반화된 카스텔누오보 가설을 제시하고 이 분야의 새로운 연구를 시작하게 되었다. 한편, 2016년-2017년에 걸쳐서 Eisenbud-Goto(1984) 가설(conjecture)로 잘 알려져 있는 이러한 문제에 대해 미국 코넬대학의 Mccullough 교수와 Peeva 교수 연구팀에 의해 Ree algebra 또는 Ree-like algebra를 이용하는 step-by-stel homogenization을 이용하여 최초로 반례(Counter-example)가 2018년에 발견되었으므로 두 개의 큰 범주, 즉 Eisenbud-Goto(1984) 가설(conjecture)이 잘 들어맞는 다양체들과 가설이 틀리는 다양체들의 이유를 분석하고 새로운 연구방향을 모색하게 방향으로 대수다양체들의 복잡도와 그뢰브너 기저의 연구가 진행되었다. 우선 대수다양체들의 복잡도를 나타내는 다양한 사영적 불변량에 대해서 연구를 병행하여 대수다양체들의 복잡도를 나타내는 사영 불변량인 reduction number에 대해 다른 불변량과의 관련성을 연구하게 되었다.

Ⅰ-2 해당 연도 추진 실적

미국 코넬대학의 Mccullough 교수와 Peeva 교수 연구팀은 아주 worst한 복잡도(complexity)를 갖는 사영스킴들의 아이디얼로 부터 거의 비슷한 정도의 복잡도를 갖는 prime ideal을 획기적으로 만들어서 이 분야 연구의 새로운 전기를 마련하였다. Eisenbud-Goto 가설의 반례가 발표되었지만 아직 다중할선들에 대해서는 Eisenbud-Goto bound가 성립하는 지 아니면 다중할선에 대해서도 반례가 있는 지 여부가 중요한 관심이 되었다. 따라서 Eisenbud-Goto 예상의 반례가 되는 3차원 다양체에 대해서 특이점들의 집합은 대수곡선을 이루는데 이러한 대수곡선들의 특이점을 지나는 할선들의 length를 Macaulay 2를 이용해서 계산하는 연구를 수행하였으나 아직 만족할 만한 연구결과는 나오지 못하고 있다. 왜냐하면, Macaulay 2 계산이 너무 복잡하여 계산을 통한 다중할선의 존재를 밝히기에는 계산능력이 많이 모자라는 것 같다. Eisenbud-Goto 예상의 반례가 되는 3차원 다양체에 대해서 특이점들의 집합은 대수곡선을 이루는데 이러한 대수곡선들의 특이점을 지나는 할선들의 length를 Macaulay 2를 이용해서 계산하는 연구는 계속해서보다 효과적인 방법론을 찾아보아야 할 것이다.

한편 매끄러운 다양체에 대한 O_X-regularity 예상에 대해서 필자와 yd 박사가 공동으로 해결하였는데 extremal case와 next to extremal case에 대한 분류에 대한 완성도를 높여서 mathAG arxv에 revised version을 다시 올렸으며 현재 투고중이다.

- Preprint : S. Kwak and J. Park, A bound for Castelnuovo−Mumford regularity by double point divisors,

한편, 대수다양체들의 복잡도를 나타내는 다양한 사영적 불변량에 대해서 연구를 병행하여 대수다양체들의 복잡도를 나타내는 사영 불변량인 reduction number에 대해 다른 불변량과의 관련성을 연구하게 되었으며 하노이연구소(IMH) N.C. Cuongr교수와 함께 사영다양체의 reduction number와 차수의 유계에 관한 새로운 논문을 완성하여 투고중이며 이는 여러 복잡도를 나타내는 사영적 불변량들 사이의 상호관계를 규명하는 논문이다.

Ⅱ. 연구개발결과

1. (With J. Park) A bound for Castelnuovo-Mumford regularity via double point divisors, submitted.

2. (With J. Park) Classification and syzygies of smooth projective varieties with 2 regular structure sheaf, submitted.

3. (with C. Doan) The reduction number and degree bound of projective subshemes, submitted

Ⅲ. 결론 및 차년도 계획

위에서 서술한 연구과제는 깜짝 놀랄만한 반례가 2017-2018년에 나옴으로서 이제는 중요한 연구방향으로 특이점이 있는 다양체에 대해서 Eisenbud-Goto 정칙성 가설의 dichotomy를 기하학적으로 이해해야 하는 문제와 그뢰브너 기저의 계산복잡도 계산을 위한 알고리즘 연구 및 다중할선에 관한 length의 유계(upper bound) 문제에 대한 증명이나 반례를 구하는 방법에 대한 연구가 관심을 가지게 될 것이다. 매끄러운 사영다양체에 대해서는 O_X regularity 문제가 필자와 박진형 박사에 의해 해결되었기 때문에 매끄러운 다양체에 대해서 Castelnuovo normality에 대한 획기적인 연구방법이 더욱 모색되어야 할 것이다. 한편, 연구가 지속된다면 reduction number에 대한 성질을 연구함에 있어 대수다양체를 초평면으로 잘라서 얻어지는 아티니안 환 (Artinian ring)의 graded ring의 각 차수(degree)들 중에 영이 되지 않는 최대 차수로 정의되는 데 이 reduction number가 일반적으로 카스텔누오보 정칙도의 상한을 주며, 대수다양체의 사영이미지들의 기하학적 성질과도 깊은 관련이 있을 것으로 추측된다. 이 부분에 대한 연구도 아주 흥미로울 것이다..

특별히 리덕션 수가 언제 카스텔누오보 정칙도와 같아지는지에 대한 연구가 필요하며 이 경우에 외부사영사상에 대해 일반화된 정칙도가설이 어떻게 변하는지 대한 연구 및 이 경우에 외부사영사상에 대한 일반화된 카스텔누오보 가설이 어떤 경우에 성립하고 어떤 경우에 성립하지 않는 지에 관해서 Macaulay 2를 이용해서 계산해 봄으로써 예상의 연구에 더 접근해 볼 수 있을 것이다. 내적사상에 대한 연구도 비슷하게 병행하게 되면 더욱 정교한 결과들을 얻을 수 있을 것으로 기대한다.