2016년도 KC30 결과보고서

연구과제명:

국문 : 일반화된 카스텔누오보 가설 및 그뢰브너 기저의 계산복잡도 연구
영문 : The generalized Castelnuovo conjecture and the complexity of Grobner basis

2016년도 KC30 사업 수행에 따른 연구결과보고서를 제출합니다.

2017년 1월 06일

연구책임자 : 곽시종 (서명)

1. 연구의 필요성

우리가 살아가는 세상의 실제 문제들을 수학적으로 모델링하여 문제를 해결하고자 할 때, 자연스럽게 등장하는 것이 다항식이다. 다항식은 아주 복잡한 함수들을 근사시키기 위해 사용되며, 수학과 자연과학을 넘어서 사회과학이나 경제학 등, 여러 분야의 문제들을 해결하기 위해 사용된다. 이러한 문제들은 수학에서 가장 오래된 문제 중 하나인 다항식들의 연립방정식들의 해를 구하는 문제로 유도될 수 있으며 다항식들의 연립방정식의 해를 구하는 문제는 과학지식에서 매우 중요하고 근본적인 문제 중 하나이다. 다항식들의 해집합을 수학적인 용어로 대수적 다양체(algebraic variety)라 하며 이러한 대수적 다양체를 연구하는 수학의 한 분야를 대수기하학(algebraic geometry)이라 한다. 대수적 다양체들을 이해하기 위한 다양한 연구방법이 알려져 있지만, 가장 근본적이면서 중요한 질문 중 하나는 다항식들의 연립방정식의 공통해로 얻어지는 기하학적 대상의 여러 성질들을 이해하고 기하학적 불변량을 계산하는 문제이다.
고차다항식의 연립방정식의 해법에 대한 대수적(algebraic), 기호적(symbolic) 연구방법 중 하나는 "다항식들에 대한 나눗셈을 일변수 다항식의 경우처럼 할 수 있느냐?"를 고민하는 문제에서 출발하며 일변수 다항식의 나눗셈은 유클리드 알고리듬으로 그 역사가 매우 오래되었다. 그러나. 이것을 다변수 다항식들의 나눗셈으로 확장하고 그 의미를 깊이 이해하게 된 것은 20세기 중반에 이르러서야 가능했다. 다변수 다항식의 나눗셈에서 핵심적인 역할을 하는 것이 그뢰브너 가저(Grober Basis)이며 그 존재성은 대수적 다양체(algebraic variety)의 특이점 해소(resolution of singularities)로 1970년 필즈상을 수상한 Hironaka 교수의 논문에서 등장한다. 그뢰브너 기저를 실제로 계산하는 알고리듬이 1965년 Buchberger에 의해 주어진 이후로 그뢰브너 기저는 대수기하와 가환대수의 계산 알고리듬 문제에서 가장 중요한 부분을 차지하고 있으며, 이론적으로만 이해되었고 실제로 불가능했던 많은 대수적 계산들이 기술의 발전과 더불어 가능하게 되었다. 이러한 계산은 현재 많은 연구자들에 의해 다양한 분야 (최적화 문제, 고딩이론, 로보틱스, 제어이론, 대수적 통계이론, 분자생물학 등)에서 응용되고 있다. 고전적 대수기하학의 가장 오래된 문제들 중의 하나인 "Castelnuovo-Mumford-Eisenbud-Goto" 가설은 그뢰브너 기저의 복잡도와 대수다양체들의 기하학적 성질과 대수적 구조를 이해하는 연구와 직접적으로 관련되어 있어서 이 분야의 새로운 연구방향이 매우 필요하다고 생각된다.

2. 연구의 목적

카스텔누오보 교수에 의해 1900년대 초에 처음 제기된 고전 대수기하학의 매우 어려운 문제로 1984년에 모든 차원에 대해서 공식적으로 제기된 "Castelnuovo-Mumford-Eisenbud-Goto" 가설을 이해하고 보다 일반화된 관점에서 문제를 해결하려는 일반화된 카스텔누오보 가설을 제시하였다. 이 가설은 그뢰브너 기저 이론에서 다루는 복잡도(Complexity)와 아주 밀접한 연관성을 가지고 있어서 복잡도 계산과 카스텔누오보-멈포드 정칙성과의 관계를 inner projection과 outer projection 사상을 가지고 이해하려고 하는 것이 연구의 주된 목적이다.

3. 연구수행 내용

카스텔누오보(Castelnuovo) 가설은 수학계에서 Eisenbud-Goto(1984) 가설로 잘 알려져 있으며 1896년 카스텔누오보에 의해 3차원 사영공간에 존재하는 모든 대수곡선들에 대해서 특이점이 있거나 또는 특이점이 없는 매끄러운 곡선에 대해 완벽하게 해결되었고 1986년 Gruson, Lazarsfeld 그리고 Peskine 교수에 의해 임의의 차원의 복소사영공간에 존재하는 모든 곡선들에 대해서도 역시 성립함이 증명되었다. 그 이후 대수다양체들의 차원이 1보다 큰 경우에 대해서 다양한 방법들이 시도되어져 왔는데 2016년도에 이 분야 연구의 가장 큰 사건은 코넬대학의 Irena Peeva 교수

연구팀에 의해 최초로 반례(Counter-example)가 발견되었다는 점이다. 이 반례들은 매우 예측하기 어려운 것 이었는데 Ree algebra 또는 Ree-like algebra를 이용하는 step-by-stel homogenization을 이용하여 이론적으로 반례들을 만든 것이다.

일반적인 Scheme 카테고리에서는 “Castelnuovo-Mumford”의 정칙성(regularity)이 주어진 다양체의 차수(degree)에 대해 doubly exponential하게 증가는 반례가 많이 존재하는 것이 알려져 있었다. 코넬대학의 Irena Peeva 교수 연구팀은 이러한 매우 정칙성(regularity)이 큰 구조가 복잡한 scheme 들로부터 “Castelnuovo-Mumford”의 정칙성(regularity)이 거의 같은 좋은 대수다양체를 만들 수 있다는 것을 대수적 방법으로 증명하였다. 이로써 100년 동안 유지되어 오고 1980년대부터 많은 연구가 진행되어 오던 연구의 방향이 여러 가지 관점에서 변할 수밖에 없게 되었다.

우선 아직 출판되지 않은 Irena Peeva 교수와 Jason Mccullough 교수의 공동논문을 철저히 분석하고 이해하는 연구세미나를 지속적으로 개최하였으며 특히 이 분야 세계적인 석학교수이며 University of California, Berkeley 대학 소재 MSRI director인 Eisenbud교수를 초청하여 세미나를 개최하였고 증명방법의 엄밀성과 앞으로의 연구수행 방향에 대해서 자문을 구하였다. 특히, 최근의 연구에 대해서 2017년 3월 9일부터 4일간 아칸소 대학에서 이 분야 학술대회가 개최되며 거의 대부분의 전문가들이 참석 예정이다. 특히, 코넬대학의 Irena Peeva 교수 연구팀에 의해 발견된 반례들은 특이점(singular point)이 어떤 관점에서 보면 매우 안 좋은 경우이며 이러한 특이점들이 어떻게 사영적 불변량인 “Castelnuovo-Mumford”의 정칙성(regularity)를 나쁘게 하는 지를 체계적으로 규명해야 하는 점을 인식하게 되었다. 아울러, 매끄러운 다양체들에 대해서는 여전히 “Castelnuovo-Mumford-Eisenbud-Goto” 가설을 맞다고 생각하고 적절한 연구방법론을 개발하려고 여러 가지를 시도하였다. 대부분 실패로 끝났지만 많은 연구노하우가 쌓이게 되었고 매끄러운 다양체들에 대해서는 많은 진전이 있었다고 생각한다. 앞으로는 연구방향을 두가지 즉 매끄러운 다양체에 대해서 긍정적인 방향으로 증명을 시도하려고 하고 특이점이 있는 경우에는 특이점들의 어떤 부분들이 “Castelnuovo-Mumford-Eisenbud-Goto” 가설의 upper bound를 넘어서는 regularity를 갖게 되는 지 규명하는 방향으로 연구를 진행시켜야 하겠다.

4. 연구수행 결과

아직까지는 연구결과들을 저널에 투고할 정도로 가다듬지를 못했지만 틈틈이 Preprint를 업데이트하고 있다. 특히, 매끄러운 다양체에 대해서는 다양체의 차수(degree) d에 대해서 regularity가 2d 정도의 upper bound가 있을 것으로 예상하고 있다.
“Castelnuovo-Mumford-Eisenbud-Goto” 가설에서 제시하는 upper bound 보다 2배정도 크지만 매우 의미 있는 결과가 나올 것으로 생각한다.