[붙임]

KAIST Grand Challenge 30 Project 제안서

①연구제목	국문		일반화된 카스텔누오보 가설 및 그뢰브너 기저의 계산복잡도 연구		
	영문		The generalized Castelnuovo conjecture and the complexity of Grobner basis		
②제안자	성명	국문	곽시종	소속 학부/학과	수리과학과
		영문	Kwak, Sijong		
	주요 연구분야		대수기하학, 계산대수, 가환대수		
	2016년 3월 현재 진행 중인 과제내역				
	주관기관		과제명		연간 과제금액
	한국연구재단		3차이상의 결정방정식들로 정의된 복소사영다양체들의 대수적, 기하적 성질과 분류문제 연구		98,000,000
	최근 3년간 교내 연구과제 수행내역				
	구분 (KI/HRHRP/EEWS 등 교내사업을 기재)		과제명		수행기간
	없음		없음		

③제안내용	카스텔누오보 가설의 복잡도로서의 일반화 및 해결

(1) 연구주제에 대한 개요, 일반적인 해결방안 등을 소개하는 세계적 연구현황, 본인의 독창적 해결법을 소개하는 연구방법을 제시

(2) 연구의 성격이 공고문의 신청자격에서 명시된 내용에 해당하는 이유를 명시

연구제안서는 별도로 작성하여 첨부하였음.

제안자 : 곽시종 (인)

KAIST Grand Challenge 30 Project 제안서

수리과학과 곽시종

연구주제: 일반화된 카스텔누오보 가설 및 그뢰브너 기저의 계산복잡도 연구

1. 개요

우리가 살아가는 세상의 실제 문제들을 수학적으로 모델링하여 문제를 해결하고자 할 때, 자연스럽게 등장하는 것이 다항식이다. 다항식이란 계수와 변수들의 연산으로 이루어지는 수학적 표현으로 x^2-4x+7와 같이 변수를 하나만 사용하는 경우 일변수 다항식이라고 하고 x^3+2xyz^2-yz+1 과 같이 여러 개의 변수를 사용한 경우 다변수 다항식이라고 한다. 다항식은 아주 복잡한 함수들을 근사시키기 위해 사용되며, 수학과 자연과학을 넘어서 사회과학이나 경제학 등, 여러 분야의 문제들을 해결하기 위해 사용된다. 이러한 문제들은 수학에서 가장 오래된 문제 중 하나인 다항식들의 연립방정식들의 해를 구하는 문제로 유도될 수 있으며 다항식들의 연립방정식의 해를 구하는 문제는 과학지식에서 매우 중요하고 근본적인 문제 중 하나이다.

다항식들의 해집합을 수학적인 용어로 대수적 다양체(algebraic variety)라 하며 이러한 대수적 다양체를 연구하는 수학의 한 분야를 대수기하학(algebraic geometry)이라 한다. 대수적 다양체들을 이해하기 위한 다양한 연구방법이 알려져 있지만, 가장 근본적이면서 중요한 질문 중 하나는 다항식들의 연립방정식의 공통해로 얻어지는 기하학적 대상의 여러 성질들을 이해하고 기하학적 불변량을 계산하는 문제이다.

다항식들이 모두 일차식인 경우, 선형대수학의 여러 이론으로부터 해를 구하는 방법이 잘 알려져 있으며 여러 가지 컴퓨터 알고리듬이 개발되어 있다. 그러나 연립방정식이 이차식 이상의 비선형인 경우에 그 해법이 매우 어려우며 아직도 많은 연구가 진행되고 있다. 고차다항식의 연립방정식의 해법에 대한 대수적(algebraic), 기호적(symbolic) 연구방법 중 하나는 "다항식들에 대한 나눗셈을 일변수 다항식의 경우처럼 할 수 있느냐?" 를 고민하는 문제에서 출발하며 일변수 다항식의 나눗셈은 유클리드 알고리듬으로 그 역사가 매우 오래되었다. 그러나, 이것을 다변수 다항식들의 나눗셈으로 확장하고 그 의미를 깊이 이해하게 된 것은 20세기 중반에 이르러서야 가능했다. 다변수 다항식의 나눗셈에서 핵심적인 역할을 하는 것이 그뢰브너 기저(Grober Basis)이며 그 존재성은 대수적 다양체(algebraic variety)의 특이점 해소(resolution of singularities)로 1970년 필즈상을 수상한 Hironaka 교수의 논문에서 등장한다. 그뢰브너 기저를 실제로 계산하는 알고리듬이 1965년 Buchberger에 의해 주어진 이후로 그뢰브너 기저는 대수기하와 가환대수의 계산 알고리듬 문제에서 가장 중요한 부분을 차지하고 있으며, 이론적으로만 이해되었고 실제로 불가능했던 많은 대수적 계산들이 기술의 발전과 더불어 가능하게 되었다. 이러한 계산은 현재 많은 연구자들에 의해 다양한 분야 (최적화 문제, 코딩이론, 로보틱스, 제어이론, 대수적 통계이론, 분자생물학 등)에서 응용되고 있다.

2. 연구과제: 일반화된 카스텔누오보 가설 및 그뢰브너 기저의 계산복잡도

그뢰브너 기저의 중요성과 함께 자연스럽게 따라오는 질문은 "그뢰브너 기저의 계산이 얼마나 복잡한가?" 에 대한 것이다. 그뢰브너 기저의 계산 복잡도를 측정하는 문제는 Dave Bayer와 David Mumford에 의해 1993년에 소개되었다. 그들은 주어진 연립방정식을 이루는 다항식들로 생성된 아이디얼을 고려하고 그것의 최소자유분해의 관점에서 계산복잡도 측정기준을 제시하였다. 이 후 단항식(monomial)들의 역사전식 순서(reverse lexicographic order)에 대한 그뢰브너 기저의 계산이 대수다양체를 정의하는 아이디얼의 코호몰로지 소멸차수(vanishing of the cohomologies for the twisted ideal shaef)와 깊은 연관이 있다는 것이 증명되면서 많은 수학자들이 복잡도에 대한 상한(upper bound) 연구를 수행하였고 그 결과들은 대부분 수학 최상위 논문에 게재되었다. 그러나 단항식의 순서가 소거 순서(Elimination Order)일 때, 그뢰브너 기저의 계산 복잡도는 아직 알려진 것이 거의 없다. 소거 순서에 대한 그뢰브너 기저의 계산이 중요한 이유는 대수기하와 가환대수 분야의 다양한 수학적 개념에 대한 예들을 실제로 계산하는 알고리듬에서 대부분 중요하게 사용되기 때문이다. 일반적으로 역사전식 순서보다 소거 순서의 그뢰브너 기저의 계산이 더 복잡하다는 것을 경험적으로 알 수 있지만 정확한 비교 분석에 대한 연구결과는 거의 알려진 것이 없다.

우리는 소거순서(Elimination Order)에 대한 그뢰브너 기저의 계산 복잡도를 탐구하고, 그 결과들을 사용하여 일반화된 카스텔노보 가설을 해결하기 위한 연구를 진행하고자 한다. 카스텔노보 가설의 역사적 의미는 110년쯤으로 거슬러 올라가지만 1980년 중반에서야 Eisenbud에 의해 완성된 형태의 문제로 제시되었다. 이 가설은 아직까지 미해결된 대수기하와 가환대수의 가장 중요한 문제 중 하나이다.

카스텔노보 가설은 주어진 대수다양체를 정의하는 아이디얼의 코호몰로지 소멸차수에 대한 상한을 구하는 문제이다. 이 문제를 해결하기 위한 다양한 선행 연구방법이 알려져 있으나 한계가 있다. 우리는 기존의 연구방법과는 다른 관점을 제시하고자 한다. 소거순서의 그뢰브너 기저의 계산 복잡도의 기하학적 의미는 대수다양체의 사영과 깊은 연관이 있으며, 단항식들의 순서가 바뀔 때, 그뢰브너 기저의 복잡도가 어떻게 변화하는지를 살펴보고 그 기하학적 의미를 해석하고자 한다. 우리는 여기에서 그뢰브너 기저들의 복잡도 관점에서 다음과 같은 일반화된 카스텔노보 가설을 제안하고 이를 해결하고자 한다.

일반화된 카스텔노보 가설: 사영공간에 매립되어 있는 대수다양체의 그뢰브너 기저들의 복잡도는 내적사상(inner projection)이나 외적사상(outer projection)을 통해 사영이미지를 생각하면 항상 증가한다.

3. 연구방법

계산적으로 대부분의 대수다양체는 한 점을 중심으로 더 작은 사영평면 위에 사영될 때, 계산복잡도가 증가하는 것을 관찰할 수 있는데 이것을 수학적으로 엄밀하게 풀려고 시도할 것이다. 물론 지금까지 알려진 바, 반례(counterexample)는 존재하지 않으며 위에서 언급한 일반화된 카스텔노보 가설 참이라는 것이 밝혀진다면 따름 정리로서 고전적 대수기하학(classical algebraic geometry)분야의 가장 오래된 예상(conjecture)중의 하나인 카스텔노보 가설이 해

결된다. 대수다양체를 계속해서 사영시켜 나가면 이미지 대수다양체는 기하학적으로도 매우 복잡해지고 특이점들도 매우 나빠지므로 아이디얼들도 매우 복잡해지는 것은 당연하다. 그러니 로칼코호모로지(local cohomology) 이론이나 부분소거(partial elimination) 이론을 사용하거나, 리덕션 수(reduction number)들이 사영이미지에서 어떻게 변하는지 관찰하는 방법들도 유용할 수 있다. 리덕션 수는 대수다양체를 초평면으로 제약시켜 얻어지는 아티니안 환(Artinian ring)의 각 차수(degree)들을 볼 때 영이 되지 않는 최대 차수로 정의되는 데 이 수는 일반적으로 카스텔노보 정칙도의 상한을 주며, 대수다양체의 사영들의 기하학적 성질과도 깊은 관련이 있을 것으로 추측된다. 특별히 리덕션 수가 언제 카스텔노보 정칙도와 같아지는지에 대한 연구가 필요하며 이 경우에 외부사영사상에 대한 일반화된 카스텔노보 가설이 성립함을 보일 수 있을 것으로 기대한다. 내적사상에 대한 연구도 비슷하게 병행하게 되면 더욱 정교한 결과들을 얻을 수 있을 것으로 기대한다. 이러한 연구주제는 연구의 성격으로 보아 첫째, 글로벌 난제에 해당되며, 둘째, 기초과학 분야, 특히 대수학 분야 및 계산알고리듬 분야에서 가장 근본적인 문제 중의 하나이며 셋째, 현재 핫 이슈가 아니지만 학문특성상 꼭 답을 알아야 할 주제에 해당된다.