KAIST 석박사모험연구사업

무작위 운동 개체 포획 전략 연구

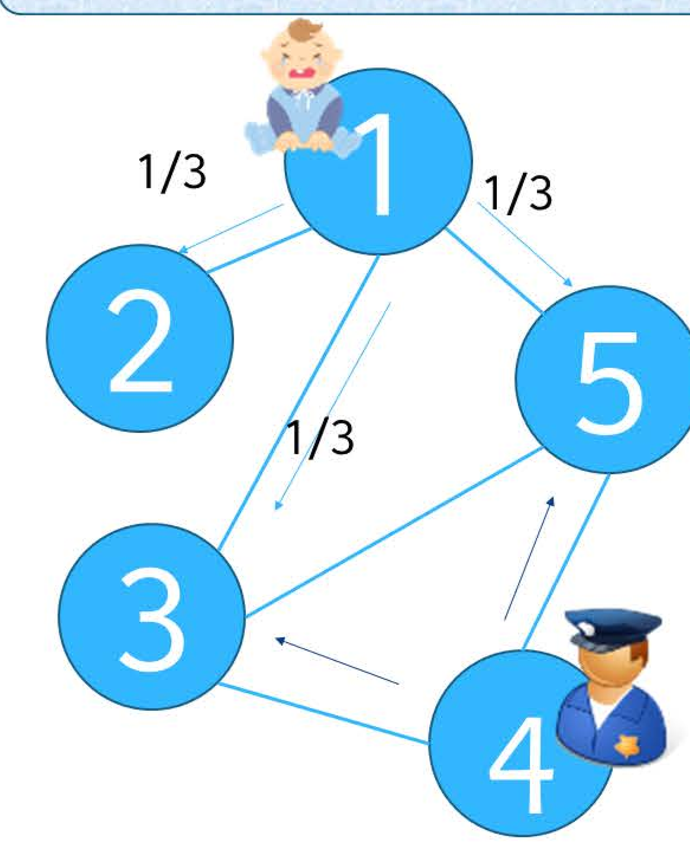
Team 10 : 장경석, 김창원

1. 서론

무작위 운동을 하는 미아를 잡을 전략

- 그래프 위에서의 무작위 운동에 대한 심도있는 연구
- 최적의 전략이 존재할까?
- 포획에 영향을 주는 요인들은 얼마나 큰 영향을 미칠까?

2. 문제 정의 및 목표



문제 정의

1. 배경 : 무방향성 유한 연결 그래프.
2. 이동 : 단위 시간마다 두 개체가 이동
3. 미아 : 그래프 G에서 무작위로 운동하는 개체.
4. 직원 : 그래프 G에서 정해진 전략을 따라 이동
5. 종료 시간 : 최초로 미아와 직원이 만날 때

목표

1. **평균 종료 시간이 최소가 되는 직원의 초기조건과 이동 전략 연구**
2. **종료 시간에 영향을 미치는 요인 연구**

3. 이론적 결과 – 직원 정지

정지된 지점에 대한 유한 이산 마르코프 정리

1. (Markov-Ergodic Theorem) 유한 이산 마르코프 연쇄가 ergodic하면, 유일한 stationary distribution이 존재하며, 이는 limiting distribution이기도 하다.
2. 무방향성 연결그래프가 이분그래프가 아님과 그 그래프에서의 무작위 걸음이 aperiodic함은 동치이다.
3. 무방향성 연결그래프에서 분포 $\pi = (\pi_i = \frac{\deg(i)}{2|E|})$ 는 stationary distribution이다.

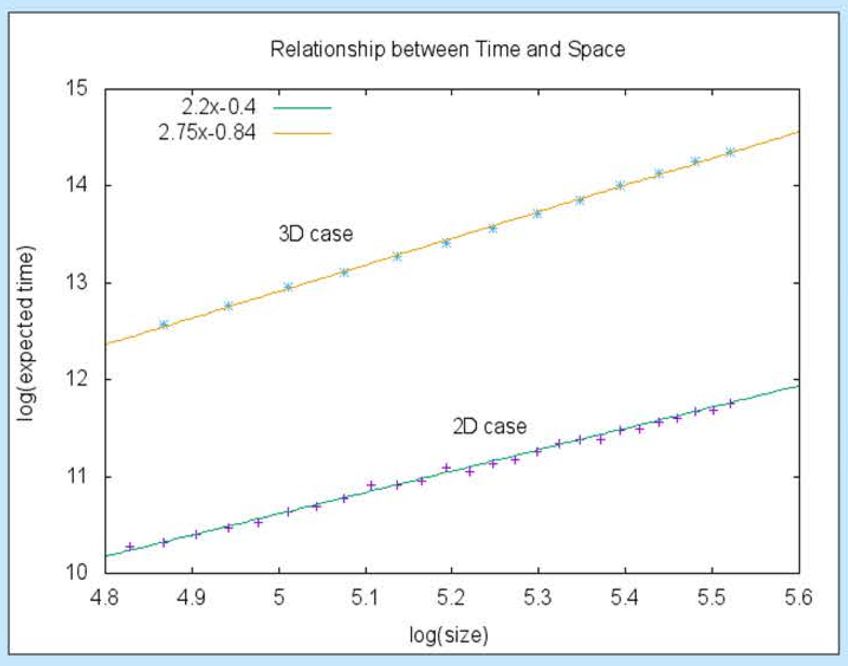
때문에 이분 그래프가 아닌 배경에서 계산을 시행했다.

문제의 정리

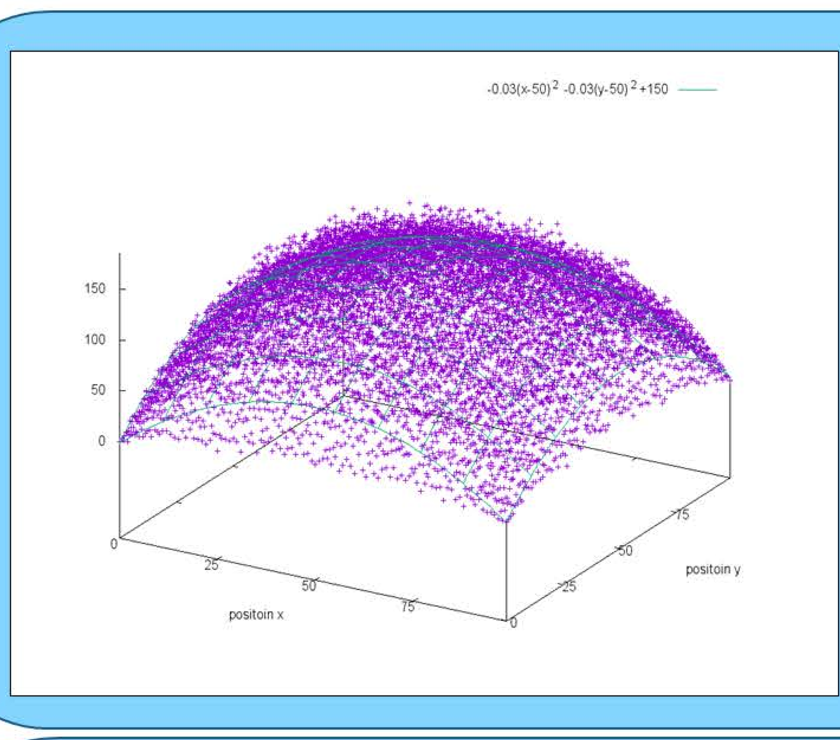
1. (Reward-Renewal Lemma) S가 i에서 시작해 i에서 끝나는 무작위 걸음일 때, $E_i N_i S = \pi_i E_i S$ 이다.
2. $Z_{ii} = \sum_{t=0}^{\infty} p_{ij}^{(t)} - \pi_j$ 일 때, $\pi_i E_\pi T_i = Z_{ii}$

결론 : 이분 그래프가 아닌 연결 그래프에서 Z_{ii}/π_i가 시간의 기대값이며, 이것이 최소가 되는 지점에서 기다리는 것이 최선의 전략이다.

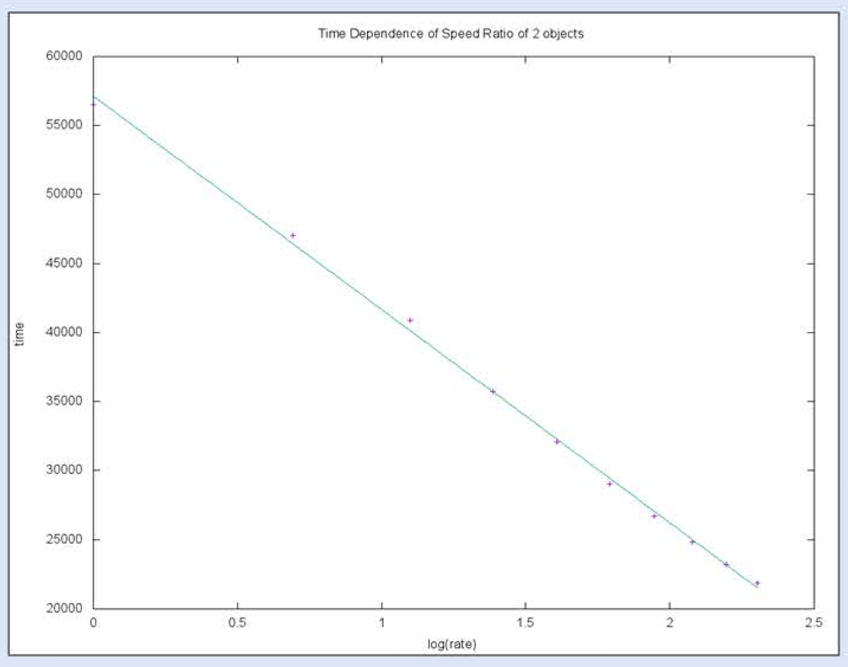
4. 실험적 결과 – 직원 무작위 이동



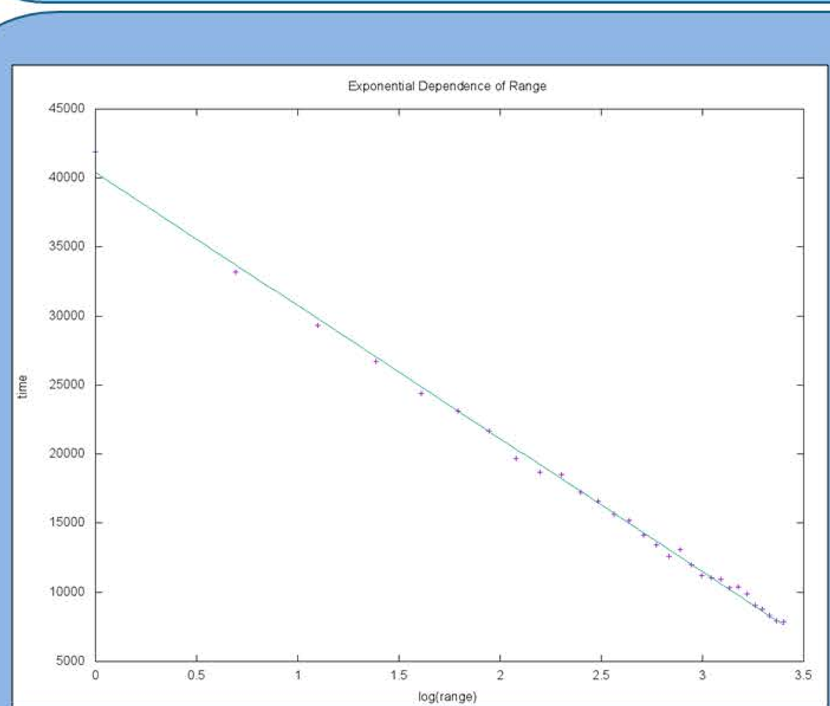
- n차원에서 공간의 크기(L)와 기대시간(T) 사이의 관계
- 각 그래프는 2차원, 3차원에서 실험 결과의 log-log 그래프
- 기울기를 분석하면 T~L^n 에 가깝다는 것을 볼 수 있다.



- 2차원 격자에서 무작위 개체의 포획 위치 분석
- 위치에 따른 빈도수
- 중앙이 빈도가 높고, Paraboloid의 형태를 띄고 있음을 볼 수 있다.



- 무작위 개체의 속도비(S)와 기대 시간(T) 관계
- 2차원 격자에서 실험 결과의 log(S)-T 그래프
- log(S)와 T가 선형적인 관계가 있음을 볼 수 있다.



- 1차원 거리(R)와 기대 시간(T) 사이의 관계
- 2차원 격자에서 실험결과의 log(R)-T 그래프
- log(R)과 T가 선형적인 관계가 있음을 볼 수 있다.

5. 결론

• 직원이 정지해 있는 상태에서는 Z_{ii}/π_i가 시간의 기대값이며, 이것이 최소가 되는 지점에서 기다리는 것이 최선의 전략이다.

• 직원이 함께 무작위 움직임을 하는 상태에서는, 실험 결과를 종합해보면 2차원 격자에서 기대시간 T는 격자의 크기(L), 속도비(S), 1차원 거리(R)와 T~$L^2 \log(\frac{a}{S}) \log\left(\frac{b}{R}\right)$ 의 관계가 있음을 확인할 수 있었다.

6. Reference

[1] Aldous, David, and James Fill. Reversible Markov Chains and Random Walks on Graphs. 2014 recompiled, Digital file.

KAIST