

[Proposal Form for Venture Research Program for KAIST Ig-Nobel Prize]

<제안서는 국문 또는 영문으로 작성 (총 5페이지 이내)>

Title

Group presentations of graph braid groups and its application

1. Information on Research Team

Name	Student ID	Department	Career	Role
오상록	20135178	수리과학과	박사과정	책임

2. Project Summary

Objective	그래프 땀임군(Graph braid group)과 군 표현(Group representation)
Description	<p>그래프 땀임군(Graph braid group)이란 그래프 위에 n개의 점이 시작 지점에 놓여있을 때, 이 점들이 서로 충돌하지 않고 움직여서 다시 시작 지점으로 돌아가는 맵들을 모아둔 집합에서 파생된 것이다. 여기서 위상적으로 homotopic한 맵들을 같은 원소로 생각하면 집합의 원소를 직관적으로 설명하기 쉬워지는데, 이 과정을 거쳐서 얻어진 집합을 그래프 땀임군이라 한다. 여기서 군의 연산(Operation)은 맵의 합성(Composition)으로 생각하면 된다.</p> <p>그래프 땀임군은 크게 두 가지 성질을 가지고 있다. 첫 번째로 그래프가 평면 그래프(Planar graph)이고 n이 2이면, Simple Commutator Related Group이다. 이는 Relation들이 단어들의 Commutator로만 표현 가능한 군 표현(Group Presentation)이 존재한다는 의미이다. 이를 통해서 평면 그래프에 대한 그래프 땀임군은 기하학적 군론 연구자들이 가장 관심을 가지고 있는 대상인 직교아틴 군(Right-angled Artin group)과 유사함을 알 수 있다.</p> <p>두 번째로 그래프 땀임군은 CAT(0)-군(CAT(0)-group)이다. CAT(0)-군이란 CAT(0)-공간(CAT(0)-space)에 특정 조건(Properly and cocompactly</p>

by isometries)을 만족하면서 작용(Action)하는 군을 의미한다. 어떠한 군들이 CAT(0)-군인지에 대한 연구 또한 활발히 연구되고 있는 주제이다.

그래프 땅임군을 공부하는 이유는 크게 세 가지가 있다.

첫 번째로 그래프 땅임군은 공학이나 실생활에 유용하게 활용될 수 있다. 우선 로보틱스(Robotics)에 활용될 수 있다. 예를 들어, 레일 위에 로봇들이 시작 지점으로부터 목표 지점까지 충돌 없이 움직이는 알고리즘(Algorithm)을 생각하는데 도움이 된다. 또한 비슷한 예로 마트에서 사람들이 쇼핑을 하는 상황을 들 수 있다. 이 경우에는 사람들의 충돌을 최소화하며 쇼핑 시간을 줄이기 위한 물건의 배치 연구에 도움을 줄 수 있다.

두 번째로 다른 땅임군들의 연구에 도움을 줄 수 있다.

기하학적 위상수학자들이 가장 관심을 가지고 있는 대상 중 하나는 땅임군(Braid group)이다. 땅임군은 위의 정의에서 그래프 대신 원판 위에 n 개의 점이 놓여있을 때를 생각한 군이다. 쉬운 정의에 비해 다양한 성질을 가지고 있는 땅임군은 오랫동안 연구되어온 대상이다. 현재 땅임군에 관련된 문제 중에서 가장 관심을 끌고 있는 문제는 다음과 같다.

Conjecture : 모든 n 에 대해서 땅임군은 CAT(0)-군(group)이다.

위의 가설에서 n 이 6이하일 경우에는 CAT(0)-군이라는 것이 증명되었다. 하지만 n 이 7이상인 경우에는 아직 알려진 바가 없다. 그래프 땅임군은 모든 n 에 대해서 CAT(0)-군이고, 땅임군과 유사한 정의를 가지고 있기 때문에 이를 바탕으로 위 가설을 증명하는데 도움을 줄 수 있을 것으로 기대가 된다.

마지막으로 다양한 예로 활용될 수 있을 것이다. 직교아틴군은 다양한 군들에 포함되어 있기도 하고, 다양한 군들을 부분군(Subgroup)으로 가지고 있다. 예를 들어 직교아틴군은 free group의 자기동형사상군(Automorphism group)과 Mapping Class Group에 포함되어 있고, Surface group을 부분군으로 가지고 있다. 직교아틴군과 cohomological dimension이 같고 유사한 군 표현을 가지고 있는 그래프 땅임군 또한 이러한 성질이 있는지, 만약 이러한 성질을 가지고 있지 않다면 어떠한 차이에 의해서 이러한 현상이 생기는데 대해 연구를 해 나아갈 수 있다.

<p>Novelty / unusualness</p>	<p>그래프 땅임군은 실생활에 활용할 수 있는 가능성이 많이 있다. 예를 들어 로봇들이 레일 위에 놓여있을 때, 이들의 움직임을 수학적으로 계산하는 곳에 활용될 수 있다. 그리고 이를 응용해서 도로에서 신호 등 체계 연구에 도움을 줄 수도 있다.</p> <p>이론적인 측면에서는 다른 땅임군 연구에 도움을 줄 것으로 기대된다. 또한 직교아틴군의 성질과 비교해가며 Embeddability에 관한 연구를 해 나아갈 수 있을 것으로 기대된다.</p> <p>이러한 다양한 활용 방향성에 비해 그래프 땅임군의 성질에 대한 연구는 활발히 진행되고 있는 편은 아니다. 특히, 현재까지 알려진 그래프 땅임군의 군 표현은 복잡한 계산을 통해서 구하기 때문에 그래프로부터 직관적으로 얻어내기는 힘들다. n이 1일 때는 기본군과 같기때문에 쉽게 계산되는 것에 비해 n이 2만 되어도 그래프 땅임군의 군 표현을 얻으려면 많은 계산이 필요하다. 공학에서 폭 넓게 적용하기 위해서는 그래프로부터 군 표현이 직관적으로 얻는 방법을 알아내야한다. 거리나 물체의 크기 등을 고려하지 않는 이상적인 상황에 대해서 일어나는 성질이 잘 연구된다면, 많은 사람들이 여러 가지 가정을 추가한 상황에 대해 관심을 가질 것으로 기대된다. 또한 이를 통해서 공학자들과 활발한 연구 교류가 생길 것으로 기대된다.</p> <p>또한 쉽게 구해지는 군 표현을 통해서 많은 기하학적 군론 학자들이 그래프 땅임군에 관심을 가질 수 있게 만들 수 있을 것으로 기대된다.</p>
<p>Scholarly profundity</p>	<p>땅임군은 많은 군론 또는 기하학적 군론 연구자들이 관심을 가지고 있는 군이다. 대수적인 내용부터 땅임군들이 작용하는 공간에 대한 기하학적 내용까지 폭 넓게 연구가 이루어지고 있다. 특히 그래프 땅임군은 그래프의 기본군(Fundamental group)의 확장된 버전으로 생각할 수 있다. 그래프의 기본군의 경우, 시작점(Base point)이 한 개만 있는 상황을 고려한 것이고 이 때 기본군은 자유군(Free group)이다. 여기서 시작점이 2개 이상일 경우를 생각하는 경우가 그래프 땅임군이 되는데, 정의는 상대적으로 간단하지만 아직 알려진 부분이 많지 않다.</p> <p>비슷한 방법으로 여러 공간에서의 땅임군을 기본군 개념을 일반화시킨 것으로 생각할 수 있다. 그래프 땅임군 경우가 잘 해결된다면 땅임군과 곡면 위의 땅임군에 대한 연구에 큰 도움을 줄 수 있을 것</p>

	<p>으로 기대된다. 특히 곡면 위의 땅임군은 Mapping Class Group이기도 하므로, 여러 공간에서의 땅임군에 대한 연구는 기하학적 군론 전반에 걸쳐 도움을 줄 수 있을 것으로 기대된다.</p>
<p>Research plan</p>	<p>우선 그래프 땅임군의 어떠한 생성자들이 그래프로부터 직관적으로 얻을 수 있는 방법들을 알아낸다. 이 중에서 어떠한 방법이 가장 효율적인지에 대해 연구를 한다. 그 이후에는 생성자들끼리 어떠한 관계(Relation)이 있는지를 알아낸다.</p> <p>군 표현이 얻어지면 이 표현을 통해서 Word Problem이 어떻게 풀리는지에 대해서 연구를 한다. Word Problem이란, 생성자들의 곱으로 표현된 단어(Word)가 항등원(Identity)인지 판단할 수 있는 알고리즘이 존재하는지를 판단하는 문제이다. 이를 통해서 군에 대한 충분한 이해를 얻을 수 있을 뿐만 아니라 다른 군과의 관계에 대해서도 알아낼 수 있을 것으로 기대된다.</p>